7. L'AIGUA EN MOVIMENT: UN DESAFIAMENT PER A LA MATEMÀTICA

Carles Perelló*

No tan sols com a substrat de la matèria viva és l'aigua d'una importància primordial. Hi ha d'altres aspectes on l'aigua té un paper fonamental pel que fa a l'activitat humana. D'entre aquests aspectes, volem destacar en aquest article aquells que estan relacionats amb el moviment de l'aigua o al si de l'aigua.

L'aigua ha estat el medi en què s'han mogut els homes muntats en les seves embarcacions. Els corrents marins són factors climatològics importants, com queda de manifest quan el fenomen anomenat «el niño» fa canviar aquests corrents a l'oceà Pacífic. També l'aigua entra en la vida de l'home com l'agent que transmet l'energia industrial, ja sigui amb turbines hidràuliques, ja sigui amb màquines de vapor.

L'home ha esmerçat molt d'enginy en l'estudi de les propietats mecàniques de l'aigua. Per a portar-lo endavant, ha hagut d'utilitzar i fins i tot de crear una gran quantitat de conceptes i tècniques, molts d'ells de la matemàtica.

Ja Arquimedes fa dos mil tres-cents anys va estudiar els cossos en flotació. Per procediments geomètrics força rigorosos, va determinar sota quines condicions un cos, que idealitzava un vaixell, es mantenia en la seva posició o bé es trabucava en inclinar-lo lleugerament. Prop de dos mil anys després, Pascal i Torricelli van aclarir el concepte de *pressió*, i d'aquesta manera van posar els fo-

* Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona. 08193 Bellaterra.

naments de la hidrostàtica. L'estudi del moviment de l'aigua, la hidrodinàmica, fou iniciat al segle XVIII per Daniel Bernoulli. D'ell és la ben coneguda fórmula que ens diu que en un líquid en moviment estacionari (és a dir, en què la velocitat no canvia amb el temps), la meitat de la velocitat al quadrat més la pressió és una constant al llarg de les trajectòries del líquid.

Va ser Euler, però, qui va crear la teoria matemàtica de la hidrodinàmica. Ho va poder fer perquè ja es disposava de l'eina del càlcul infinitesimal i amb els principis de la mecànica de Newton, tot i que va haver d'incorporar nous conceptes i notacions, com per exemple les derivades parcials. Les motivacions d'Euler no eren exclusivament acadèmiques: el primer treball que va fer sobre hidrodinàmica va ser per a dissenyar turbines hidràuliques per a moldre gra. En tractar d'entendre el comportament d'aquestes màquines, obtingué les equacions que, una mica més endavant, en bastir ell mateix una teoria general, donen lloc a les conegudes *equacions d'Euler*, que descriuen completament el moviment d'un líquid incompressible sense viscositat.

Aquestes equacions són, sense dubte, un dels grans èxits en l'esforç de la humanitat per a entendre el món. Tenint en compte que el càlcul infinitesimal i les lleis de la mecànica s'havien fet per a explicar el moviment de partícules sota l'acció de forces mútues, no deixa de ser curiós que les mateixes eines, una mica més desenvolupades, servissin per a explicar una cosa d'aparença tan diferent i complexa com és el comportament d'un medi continu.

Sense pretendre fer un curs d'hidrodinàmica, destacarem quines són les idees bàsiques en la descripció del moviment d'un líquid.

La primera hipòtesi és que el líquid no es «trenca» en moure's, sinó que les seves diverses parts són portades pel moviment i es deformen d'una manera contínua. D'aquesta manera s'associa una velocitat a cada partícula, que canvia d'una manera contínua. De fet, en la descripció d'Euler no es pensa tant en la velocitat de cada partícula, sinó la velocitat que tenen les partícules en un punt de l'espai en un instant determinat. D'una manera més precisa, la velocitat és un *camp vectorial*, és a dir, una funció que dóna la velocitat d'una partícula, que ocupa la posició x, a l'instant t, que designem per $v(x, t)$. La hipòtesi de continuïtat és que v, és a dir, cada una de les seves tres components, v_1, v_2 i v_3, és una funció contínua de les components (x_1, x_2, x_3) de x i de t. De fet, es demana una mica més: que v sigui una funció *contínuament diferenciable*, és a dir, que les derivades parcials de cada component de v respecte de les components de x i de t siguin funcions contínues.

A més, si suposem que el líquid és incompressible, s'ha d'admetre que la *divergència* del camp vectorial v sigui nul·la, és a dir, que div $v = \partial v_1/\partial x_1 + \partial v_2/\partial x_2 + \partial v_3/\partial x_3 = 0$. Això vol dir que si considerem una regió arbitrària ocupada pel líquid, la quantitat neta de líquid que travessa la frontera, és a dir, el balanç entre el que n'entra i el que en surt, és zero.

Ara, si una «partícula» del líquid es mou, va ocupant diverses posicions en passar el temps t. Si $x(t)$, amb les seves tres components ens dóna aquesta posició, llavors $x'(t)$, la derivada de la funció x respecte de t ens dóna la velocitat $v(t)$ de la partícula, i la segona derivada $x''(t)$ ens en dóna l'acceleració $a(t)$. Aquesta acceleració té, doncs, l'expressió

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d}{dt} v[x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ t] = \\ &= \frac{\partial v}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial v}{\partial x_2} x_2' + \frac{\partial v}{\partial x_3} x_3' + \frac{\partial v}{\partial t} = \\ &= v_{x_1} v_1 + v_{x_2} v_2 + v_{x_3} v_3 + v_t = \langle v,\ \nabla \rangle v + v_t, \end{aligned}$$

on hem denotat per v_i la derivada parcial de v respecte de la variable x_i, i per v_t la seva derivada respecte de t. L'expressió escrita al final és una manera més concisa d'escriure els termes que la precedeixen. S'entén que la fórmula anterior és vectorial, és a dir, que n'hi ha una d'escalar per a cada component v_i al lloc de v.

Considerem ara les forces que mouen l'aigua. Si suposem que no hi ha viscositat, l'única força que una part del líquid exerceix sobre una altra és mitjançant la pressió. La hipòtesi que es fa és que la pressió en un punt d'una secció interna considerada és d'una magnitud independent de la direcció de la secció i normal a aquesta. Aquesta magnitud de la pressió la designem per $p(x, t)$, que indica que és funció del punt de l'espai i de l'instant considerats, que també considerem que té derivades parcials, respecte de x_i i de t, contínues.

Considerant les forces que actuen sobre una «partícula», o més precisament, sobre qualsevol part del líquid, s'obté, d'acord amb els mètodes del càlcul infinitesimal, que la força, per unitat de volum deguda a la pressió és donada per $-\dfrac{1}{\rho}$ grad p, on ρ és la densitat del líquid i grad p denota el vector de les derivades parcials de p respecte de les x_i:

$$\operatorname{grad} p = (p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3}).$$

Adoptant les lleis de la mecànica de Newton, hem d'igualar l'acceleració d'una partícula multiplicada per la seva massa, amb la força que s'exerceix sobre ella. Considerant la partícula com el límit d'una part del fluid que té un diàmetre que tendeix a zero, ens queda que

$$a(t) = \langle v, \nabla \rangle v + v_t = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + g.$$

Aquí hem indicat amb g qualsevol altra acceleració sobre les partícules del fluid deguda a forces externes, com pot ser la gravetat.

Per simplicitat, i d'acord amb un costum ben establert, considerarem que la densitat ρ de l'aigua val 1, per què finalment les *equacions d'Euler* ens queden

$$\begin{cases} v_t + \langle v, \nabla \rangle v + v_t = -\operatorname{grad} p + g \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases}$$

Aquestes equacions, al seu temps, van ser donades com a condicions que necessàriament havien de complir la velocitat i la pressió de l'aigua, i poc es pensava que determinaven del tot el seu moviment. Sorprenentment, resulta que és així, si és que precisem quina és la condició, és a dir, la velocitat del fluid al temps inicial, i si estipulem també les condicions a les fronteres del recipient que conté el líquid. Per exemple, podem demanar que el líquid no s'escapi a través de les parets del seu contenidor, excepte en certes regions d'aquestes parets, on podem fixar la velocitat o bé la pressió. Un cas seria el d'una canonada amb les pressions determinades en els seus dos extrems. Si volguéssim donar les velocitats, hauríem de tenir compte amb la incompressibilitat.

La demostració matemàtica que les equacions d'Euler determinen l'esdevenidor de l'estat del fluid si es coneixen les condicions inicials i les condicions a la frontera, és d'una certa dificultat i no està encara resolta en tots els casos. El que falta és veure que, en el model matemàtic, les solucions existeixen per a tot temps en el cas tridimensional general.

Si es vol tenir en compte la viscositat, llavors s'ha de tornar a considerar una part prou petita del fluid i les forces que actuen sobre ella. En aquest cas, a més de la pressió que actua normalment a la frontera de la part considerada, cal tenir en compte les forces de fricció, que hi actuen tangencialment. Fent consideracions que ens estalviarem, s'obté un nou terme per a la força sobre les partícules, que afegit als que ja teníem, dóna com a resultat les *equacions de Navier-Stokes*:

$$
\begin{aligned}
v_t + \langle v,\nabla\rangle v &= -\operatorname{grad} p + \nu\,\Delta v + g \\
\operatorname{div} v &= 0.
\end{aligned}
$$

Aquí ν és el coeficient de viscositat cinemàtica, i Δv és un vector de tres components, una per a cada component v_i de la velocitat:

$$\Delta v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2}.$$

Aquesta expressió es coneix com la *laplaciana* de v_i i ens mesura en certa manera la difusió de la velocitat deguda a la fricció interna del líquid.

Per a determinar el comportament del líquid en funció del temps, ens cal, a més, donar el camp de velocitats en l'instant inicial a més de les condicions de pressió i velocitat en la frontera de la regió considerada. Hi ha una diferència important respecte del cas en què no hi ha viscositat, ja que en aquest darrer és una condició natural demanar que el líquid no travessi les parets, i això queda reflectit en el fet que la velocitat hi sigui tangencial. En canvi, quan tenim viscositat, la condició natural és que el líquid quedi «enganxat» a les parets, i llavors la velocitat ha d'anul·lar-s'hi per a evitar forces de fricció infinites.

Les equacions de Navier-Stokes —és a dir, la influència de la viscositat— no van poder ser plantejades correctament fins que no es va disposar dels conceptes i les eines matemàtiques per a retratar l'estat d'esforços interns d'un continu, i en particular, sense tenir un mínim de teoria sobre la constitució i les influències relatives internes en un medi continu. Això no es va aconseguir fins a la primera meitat del segle passat.

Com en el cas de les equacions d'Euler, les de Navier-Stokes ens haurien de proporcionar, conegudes les condiciones inicials, una única solució al llarg del temps. En el cas de fluxos en dimensió dos, els teoremes matemàtics existents així ens ho garanteixen. En dimensió tres, però, encara hi ha problemes per a establir aquesta existència i unicitat per a tot temps positiu d'una manera general. Tot i això, el model obtingut, en la pràctica, és prou bo per a modelar el comportament d'un fluid si les velocitats no són massa grans.

Cal fer notar que, encara que no coneixem les expressions matemàtiques dels fluxos solucions de les equacions, siguin la d'Euler o la de Navier-Stokes, el que sí que podem fer és avaluar-les numèricament. I aquí és on els ordinadors digitals han influït enormement en tot l'estudi de la hidrodinàmica: ja no cal posar un model en el laboratori dins d'un corrent per a simular les condicions reals. N'hi ha prou amb introduir a l'ordinador, convenientment «discretitzades», les equacions de la hidrodinàmica per a obtenir-ne les solucions aproximades. De fet, hauríem volgut dir «tan aproximades com vulguem», però les limitacions de capacitat dels ordinadors fa que tot sovint no sigui així.

Considerarem ara uns quants exemples de les conseqüències de l'aplicació d'aquestes equacions a casos senzills.

Una situació molt estudiada és l'anomenat *flux potencial* en el pla. Aquesta situació correspon a un líquid sense viscositat movent-se amb la tercera component de la velocitat, v_3, igual a 0, i amb v_1, v_2 i p independents de x_3, per la qual cosa es pot considerar que el flux té lloc en el pla (x_1, x_2) amb components v_1 i v_2 per a la velocitat. A més, podem restringir-nos a estudiar el cas en què el flux és estacionari, és a dir, en què tant v com p no depenen de t. I encara, per a simplificar més, podem considerar que no hi ha «vorticitat», és a dir, que la integral de la component tangencial de la velocitat sobre qualsevol corba tancada del pla és zero. En paraules més planeres, això vol dir que no hi ha una tendència del flux a girar al voltant dels punts. Quan la vorticitat és nul·la, diem que el camp de velocitat és *irrotacional* perquè el *rotacional* de v, que val $\partial v_2/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_2$ en el cas pla que ens ocupa, resulta 0 a tots els punts.

d'una funció ϕ de (x_1, x_2) amb valors reals, és a dir, $v = \text{grad}\ \phi$, on grad ϕ és el camp vectorial de components $\partial\phi/\partial x_1$ i $\partial\phi/\partial x_2$.

Com que div $v = 0$, resulta doncs que div grad $\phi = 0$, és a dir,

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial x^2 = \Delta\phi = 0.$$

La funció ϕ s'anomena *potencial*, i és per aquesta raó que el flux és anomenat també *potencial.*

Per a trobar solucions d'aquests fluxos potencials podem, doncs, limitar-nos a resoldre l'equació de Laplace $\Delta\phi = 0$ amb condicions en la frontera apropiades. Per al cas pla que estem considerant, es troben les solucions fent servir les *aplicacions conformes* de la teoria de variable complexa.

Fixant-nos només en aquests tipus de fluxos, ens trobem amb situacions prou interessants. Per exemple, ens podem imaginar un objecte immers en un corrent que tendeix a una velocitat fixada a l'infinit: com si poséssim un obstacle a un corrent inicialment uniforme. Sent el flux estacionari, les partícules en mouen sobre línies fixades que anomenem *línies de flux* o de corrent. Aquestes línies estan deformades perquè s'adapten a la forma de l'obstacle, però prou lluny d'ell conserven aproximadament el seu caràcter de paral·lelisme i uniformitat de velocitat.

Si sota aquestes circumstàncies calculem la força que el fluid exerceix sobre l'obstacle, obtenim el valor zero. És a dir, el líquid no exerceix cap força sobre el cos que hi és immers! Certament, això desafia la intuïció que tenim sobre l'efecte d'un corrent sobre un obstacle. Aquest curiós resultat és conegut com a *paradoxa de D'Alembert.*

Per a explicar la desviació entre l'experiència i aquest resultat teòric, es té, d'una banda, l'existència de friccions internes degudes a la viscositat, que en els casos experimentals no semblen ser suficients per a explicar-ho. De fet, sembla que les forces de fricció tendirien a portar el cos en la direcció del corrent. En canvi, s'observa, si l'obstacle té una forma de placa inclinada, que hi ha forces transversals al moviment de l'aigua. Tant és així que, salvant el «detall» que l'aire no és incompressible, aquesta força transversal és la que s'utilitza per a sustentar els avions en vol.

Es necessita, doncs, una nova explicació. Aquesta es troba en què, al moment d'establir-se el règim estacionari a partir de la situació transitòria d'introducció de l'obstacle al corrent, es crea una *circulació* al voltant de l'objecte immers. És a dir, si prenem una corba tancada al voltant de l'objecte, resulta que ja no és cert que la integral de la component tangencial del camp de velocitats sigui nul·la, encara que aquesta nul·litat continua sent certa si la corba no encercla l'obstacle. El mecanisme de generació d'aquesta circulació comporta modificacions en el flux que tenen a veure amb la formació d'esteles al darrere d'un obstacle dins d'un corrent.

Quan tenim aquesta circulació al voltant de l'obstacle, llavors la força que hi exerceix el líquid ja no és zero, sinó que és proporcional a aquesta circulació i a la velocitat del corrent, i està dirigida perpendicularment a la direcció general d'aquest corrent.

En el cas que el líquid sigui viscós, la situació és molt més complicada i no es pot reduir a un flux potencial. De fet, es coneixen ben poques solucions matemàtiques de les equacions de Navier-Stokes amb fluxos estacionaris. Un d'ells és l'escolament d'un líquid al llarg d'un tub, que si és circular dóna un perfil de velocitats parabòlic. L'altre és l'anomenat *flux de Couette*, en el qual el líquid es mou entre dues plaques paral·leles amb moviment uniforme a una distància constant l'una de l'altra. El perfil de velocitat resulta lineal. En el *flux de Couette circular* el líquid es troba entre dos cilindres coaxials que giren relativament l'un de l'altre, les línies de corrent són cercles en plans perpendiculars a l'eix i centrats en ell, i la velocitat en els cercles de radi r és de la forma $ar + b/r$, i coincideix amb la dels cilindres en els punts en què el líquid els toca.

Tot i que no se'n coneix l'expressió, es pot demostrar matemàticament l'existència de molts altres fluxos estacionaris per a un líquid viscós; per exemple, l'escolament per una canal amb obstacles. Hi ha d'altres situacions en què semblaria que hi hauria d'haver solució estacionària, d'acord amb observacions experimentals, però la matemàtica no ha estat capaç d'establir-ne l'existència. Tal és el cas del flux al voltant d'un cercle en el pla, amb velocitat uniforme a l'infinit.

Aquestes solucions estacionàries, d'altra banda, poden ser estables o no ser-ho. Al darrer exemple, posem per cas, del flux passant un cercle en el pla, l'evidència experimental mostra que, si la velocitat del corrent és prou gran, llavors es produeix una estela fuetejant, que correspondria a solucions periòdiques, fet que podria voler dir que la solució estacionària, per a aquesta velocitat, és inestable, i en canvi resulta estable el règim periòdic. Fent servir un tecnicisme, es diu que s'ha produït una *bifurcació* per a un cert valor de la velocitat. Això vol dir que s'ha produït un canvi qualitatiu en el comportament del flux. En el nostre exemple, passa de tenir un règim estacionari estable a tornar-se inestable. Aquest exemple, però, s'ha escapat fins ara de l'anàlisi matemàtica, començant, com ja hem dit, perquè ni tan sols s'ha establert l'existència de la solució estacionària.

Un cas en què l'anàlisi matemàtica sí que ha pogut explicar el fenomen observat és el de la bifurcació que es produeix en el flux de Couette circular quan es sobrepassa una certa velocitat crítica per a la rotació relativa dels cilindres. S'ha observat que, a partir d'una certa velocitat, el flux estacionari circular perd l'estabilitat, i en canvi s'estableix un nou flux estacionari amb el fluid distribuït en anells entorn de l'eix, amb un flux helicoïdal dins de cada anell. Aquests anells s'anomenen *cel·les de Taylor.*

Quan, en els dos exemples anteriors, fem créixer la velocitat, es produeixen altres bifurcacions, és a dir, canvis de comportament —almenys, pel que podem observar al laboratori. Aquests canvis de comportament solen desembocar, per a una velocitat prou alta, en un *flux turbulent.* Això vol dir que aparentment el flux s'ha tornat caòtic i que les velocitats i els seus canvis semblen aleatoris. L'aparició de la turbulència pot fer pensar que, a causa de fenòmens microscòpics, les equacions de Navier-Stokes deixen de ser vàlides. No ens n'hauríem d'estranyar, d'aquesta possibilitat, puix que per a la deducció d'aquestes equacions hem fet servir fonamentalment el principi que no es presenten discontinuïtats ni en el fluid, ni en les seves velocitats, ni en les derivades d'aquestes darreres.

Hi ha, però, altres intents d'explicació del fenomen de la turbulència que no forcen a abandonar la validesa de les equacions en aquestes condicions. Un dels intents és explicar-ho mitjançant l'aparició dels anomenats *atractors estranys.* Aquests atractors no apareixen al si del líquid, sinó a l'espai dels possibles estats del líquid. En aquest espai, el comportament del fluid està representat per una corba que comença en l'estat inicial i que progressa en el temps passant per diferents estats. Una explicació de la turbulència està en què aquestes corbes tenen un comportament molt complicat. No tendeixen ni a una solució estacionària ni a una solució periòdica. Segons aquesta manera de veure les coses, totes les solucions amb condicions inicials, dins de certes limitacions, tendirien a un atractor format per òrbites de comportament complicat, que arrossegarien a aquest comportament les que s'hi aproximen.

L'inconvenient d'aquesta visió és que, en un líquid turbulent, sembla que *cada* estat és complicat, no tan sols l'evolució de l'estat en el temps, i l'atractor estrany no explica la complicació espacial.

Una altra explicació de la turbulència ens diria que les equacions de Navier-Stokes porten en elles mateixes el germen de la seva invalidació. Recordem que hem esmentat que en tres dimensions no s'ha pogut demostrar que les solucions de les equacions existeixen per a tot temps positiu. Si s'analitzen les causes d'aquest problema, es veu que l'obstacle consisteix en el fet que poden aparèixer punts de l'espai on les solucions, és a dir, la velocitat, no és acotada. Com si apareguessin vòrtexs amb velocitat tendint a l'infinit en un punt. Certament, l'existència d'aquests vòrtexs invalidaria la deducció que hem fet de les equacions de Navier-Stokes. Sigui com sigui, les equacions mateixes ens els forneixen. Certament, no observarem mai velocitats infinites ni els seus gradients infinits en el si d'un fluid. El que sí que s'observa, però, en un flux turbulent, és l'aparició de gran nombre de vòrtexs. Pot ser que siguin els generats per les equacions que, en no poder assolir velocitats infinites, s'atomitzen fins a fer invàlides les equacions.

Retornant als aspectes de l'aigua en moviment més lligats a la vida de l'home esmentats al començament d'aquest article, farem uns quants comentaris sobre el paper que hi juga la matemàtica.

Pel que fa al moviment de vehicles en un medi aquós, el que hem dit sobre obstacles en un corrent s'hi aplica directament: tant se val que sigui l'obstacle que es mogui en un líquid quiet com un corrent de líquid que es troba l'obstacle quiet. Per a resoldre el problema d'un cos en moviment, el que es pot fer és una simulació numèrica de les equacions de Navier-Stokes. No deixen, però, d'haver-hi problemes quan la velocitat és prou gran. Un d'aquests problemes té a veure amb l'anomenada *capa límit*, que és la part del líquid més propera al cos submergit i que és on els canvis de velocitat del líquid són més grans, puix que aquesta s'ha d'anul·lar en els punts de contacte amb el sòlid. Aquesta capa límit és difícil d'estudiar, fins i tot amb els mètodes numèrics que es fan servir amb els ordinadors més capaços. Un dels aspectes de la dificultat es presenta quan aquesta capa límit, és a dir, la regió amb grans gradients de velocitat, es desenganxa del sòlid immers. Llavors es pot produit el fenomen conegut com a *cavitació*, que consisteix en la formació de regions de molt baixa pressió, on poden produir-se fins i tot canvis de fase del fluid. A més, en desenganxar-se la capa límit es generen vòrtexs que interactuen entre ells de manera complicada i donen lloc, eventualment, a regions turbulentes. Sigui com sigui, podríem dir que la problemàtica del moviment dels cossos submergits en un fluid viscós incompressible està resolta en la pràctica, combinant la simulació numèrica amb l'experiment. Queden, però, molts punts no resolts satisfactòriament des del punt de vista matemàtic. Si es tracta de fluids compressibles, per exemple l'aire, llavors les equacions es compliquen, i, a altes velocitats, apareixen regions on la velocitat i la pressió canvien molt en poc espai, que es coneixen com a *xocs*. També es tracten en la pràctica amb simulació numèrica, però els problemes matemàtics sense solució satisfactòria són, naturalment, encara més nombrosos que en el cas incompressible.

També hem parlat dels corrents marins. Aquí el problema no està en la turbulència o en les capes límits o en el xocs, sinó en la complicació del model. Aquests corrents depenen de vents, temperatures, salinitat, marees, rotació de la Terra, etc. Tot i que se'n pot fer un model mitjançant equacions en derivades parcials susceptible de ser simulat en un ordinador, la complexitat de les interaccions amb altres factors no ha permès fer prediccions prou precises. Així és com el fenomen d'«el niño», que fa canviar els corrents i, amb ells, el clima de les costes americanes del Pacífic, encara roman sense explicar, i es produeix d'una faisó que sembla aleatòria.

Hem de fer notar aquí que no sols és la complexitat de les dades el que dificulta la predicció, sinó també la inestabilitat del fenomen, que fa que petites desviacions de les condiciones en un moment donat originin canvis enormes al cap d'un temps relativament curt; és el que s'anomena *efecte papallona*. Les equacions dels corrents marins, lligades a tota la meteorologia, pateixen d'aquesta inestabilitat.

Finalment, també hem esmentat les màquines que aprofiten l'energia de l'aigua per a produir força motriu. En el cas de les turbines hidràuliques, la problemàtica és ben bé la mateixa que en el cas d'un cos immers en el líquid en moviment. Es presenten els fenòmens de desenganxament de la capa límit, cavitació i turbulència. Si les turbines són de vapor, la situació és semblant a la d'un flux supersònic passant un obstacle: a més dels problemes anteriors, hem de tenir en compte la formació de xocs. Tot i això, es simula més o menys amb èxit mitjançant ordinadors digitals. Fem notar, però, que per a construir turbines no n'hi ha prou amb quatre càlculs: la problemàtica és tan complexa que ben poques indústries al món són capaces de fer-ho bé.

No deixarem passar l'ocasió per a fer veure que la matemàtica també incideix en la comprensió de les reaccions químiques que tenen lloc entre reactants dissolts en un líquid i, d'aquesta manera, més o menys directament en l'aigua com a substrat de la vida. Efectivament, la dinàmica de les interaccions dins d'un reactor químic és modelada per equacions en derivades parcials del tipus de reacció i difusió, és a dir, per $v_t = f(u) + d\ \Delta_x\ u$, en què u, funció de l'espai x i del temps t, és un vector les components del qual són les concentracions dels diferents reactants. Sota certes condicions, les reaccions tendeixen a un equilibri uniforme, però, en canviar aquestes condicions (per exemple, la mida del reactor), es pot produir una bifurcació que inestabilitza aquest equilibri uniforme i fa que les concentracions tendeixin a una distribució no constant. És un fenomen de *morfogènesi*. En el cas de la matèria viva, podria ajudar a explicar la diversificació que es produeix durant el desenvolupament embrionari. Certament, no serveix per a predir el que passarà, però en certa manera explica quina mena de cosa està passant. I aquest és un aspecte important de la matemàtica. No tan sols és el seu aspecte predictiu el que ens interessa, sinó el seu aspecte explicatiu, que ens ajuda a entendre millor el món.